Ref : Hirsch - Lacombe

Etude d'une norme dans un Hilbert

DEV

Énoncé : Soit E un espace de Hilbert complexe. Pour $T \in \mathcal{L}(E)$, on définit $m(T) := \sup\{|(Tx,x)| \mid \|x\|=1\}$.

Alors $m(T) \leq \|T\| \leq 2\cdot m(T)$. Si T est auto-adjoint alors $\|T\| = m(T)$.

D/ * Pour $x \in E$, $\|x\|=1$, on a $|(Tx,x)| \leq \|Tx\|\cdot\|x\| \leq \|T\|\cdot\|x\|^2 = \|T\|$.

Donc $m(T) \leq \|T\|$.

* Pour $x \in E$ quelconque, $S \in \mathcal{L}(E)$ on a $|(Sx,x)| \leq m(S)\cdot\|x\|^2$ (factoriser par $\|x\|^2$ pour $x \neq 0$, vrai aussi si $x=0$).

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x,y \in E$, on a :

$$|(S(x\pm ty), x\pm ty)| = |(Sx,x) \pm t[(Sx,y)+(Sy,x)] + t^2(Sy,y)| \leq m(S)\|x\pm ty\|^2$$

D'où
$$\begin{aligned}|2t[(Sx,y)+(Sy,x)]| &= |t[(Sx,y)+(Sy,x)] + (Sx,x) + t^2(Sy,y) \\ &\quad + t[(Sx,y)+(Sy,x)] - (Sx,x) - t^2(Sy,y)| \\ &\underset{\text{inégalité triangulaire}}{\leq} m(S)\left[\|x+ty\|^2 + \|x-ty\|^2\right] \underset{\text{identité du parallélogramme}}{=} 2\,m(S)\left[\|x\|^2 + t^2\|y\|^2\right]\end{aligned}$$

Ainsi en retirant les valeurs absolues pour t à gauche :

$$t\,|(Sx,y)+(Sy,x)| \leq m(S)\left[\|x\|^2 + t^2\|y\|^2\right].$$

On reconnaît un polynôme du second degré en t, coefficients réels, toujours positif.

Son discriminant est donc négatif, ie $|(Sx,y)+(Sy,x)|^2 \leq 4\,m(S)^2\|x\|^2\cdot\|y\|^2$

$$\rightsquigarrow |(Sx,y)+(Sy,x)| \leq 2\,m(S)\|x\|\cdot\|y\|.$$

* Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda|=1$ tel que $\lambda^2(T^2x,x) \in \mathbb{R}_+$.

On applique l'inégalité à $S = \lambda T$, $y = \lambda T x$. Alors :

$$\left||\lambda|^2(Tx,Tx) + \lambda^2(T^2x,x)\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somme de deux} \\ \text{termes positifs}}}{=} \|Tx\|^2 + \underbrace{\lambda^2(T^2x,x)}_{\in\mathbb{R}_+} \leq 2\,\underbrace{m(\lambda T)}_{=m(T)\cdot|\lambda|}\|x\|\cdot|\lambda|\cdot\|Tx\|.$$

Donc $\|Tx\|^2 \leq 2\,m(T)\|x\|\,\|Tx\|$ ie $\|Tx\| \leq 2\,m(T)\|x\|$. Ainsi $\|T\| \leq 2\,m(T)$.

* Si T est auto-adjoint, l'inégalité donne $|\mathrm{Re}\,(Tx,y)| \leqslant n(T)\,\|x\|\,\|y\|$

Avec $y = Tx$, on a $\|Tx\|^2 \leqslant n(T)\|x\|\,\|Tx\|$ donc $\|Tx\| \leqslant n(T)\,\|x\|$

et donc $\|T\| \leqslant n(T)$, d'où l'égalité. ▨

Corollaire : n est une norme équivalente à $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{L}(E)$.

D] Le caractère défini est conséquence de $\|T\| \leqslant 2\,n(T)$.
L'inégalité triangulaire et l'homogénéité sont faciles. ▨

Rq : L'inégalité $\|T\| \leqslant 2\,n(T)$ est fausse pour E Hilbert réel avec $\dim(E) \geqslant 2$.

D] Soient u, v deux vecteurs orthogonaux de norme 1 dans E.
On définit $T \in \mathcal{L}(E)$ par $T(\lambda u + \mu v + w) := \mu u - \lambda v$, $\forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall w \in \mathrm{vect}\{u,v\}^\perp$.

Alors T est de norme 1 : $\|T(\lambda u+\mu v+w)\|^2 = \mu^2 + \lambda^2 \leqslant \|\lambda u+\mu v+w\|^2$
et $\|T(u)\|^2 = \|-v\|^2 = 1 = \|u\|^2$

Mais $\langle T(\lambda u+\mu v+w), \lambda u+\mu v+w\rangle = \langle \mu u - \lambda v, \lambda u+\mu v+w\rangle$

$= \mu\lambda - \lambda\mu = 0$.

produit scalaire réel

Donc $n(T) = 0$. ▨

Rq : La constante 2 est optimale pour E Hilbert complexe, $\dim(E) \geqslant 2$.

D] Soient u, v 2 vecteurs orthogonaux de norme 1 dans E.
On définit $T \in \mathcal{L}(E)$ par $T(\lambda u+\mu v+w) := \lambda v$, $\forall \mu, \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall w \in \mathrm{vect}\{u,v\}^\perp$.
Alors T est de norme 1 (comme ci-dessus) et on a $|\langle T(\lambda u+\mu v+w), \lambda u+\mu v+w\rangle|$

$= |\langle \lambda v, \lambda u+\mu v+w\rangle| = |\lambda\bar{\mu}| \leqslant \dfrac{|\lambda|^2+|\mu|^2}{2} \leqslant \dfrac{|\lambda|^2+|\mu|^2+\|w\|^2}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Donc $n(T) \leqslant \frac{1}{2}$. Comme $1 \leqslant 2\,n(T)$ on a $n(T) = \frac{1}{2}$. ▨